GRB 基本理论推导

张博

2008 年 6 月 3 日

1　关于火球

关于火球的定义，可将其理解为体积小、能量大、光深大的区域。根据观测，GRB 的各向同性能量为：

$$E_{\gamma,iso} = 10^{52}\left(\frac{D_L}{3\times10^{28}}\right)^2\left(\frac{F_\gamma}{10^{-6}ergcm^{-2}}\right)erg$$

而根据光变时标（约 0.2 毫秒）知，源区尺度为：

$$R_{min} = 10^7\left(\frac{\delta t}{0.33ms}\right)cm$$

以上两式可给出 GRB 火球的基本数量级。对于高能火球，会发生光子湮灭反应，即 $\gamma+\gamma\rightarrow e^{\pm}$。若火球成分为纯光子与正负电子对，应有黑体谱，与观测所得的非热谱不符。因此应考虑重子成分。

重子火球光深为：

$$\tau = \tau_p + \tau_b$$

其中 τ_p 是电子对光深，有：

$$\tau_p = \sigma_T n_{\pm} R \simeq 2.58\times10^{14} T_{100}^{3/2} R_9 exp\left(-5.1/T_{100}\right)$$

而重子光深为：

$$\tau_b = \sigma_T n_b R = \frac{3\sigma_T M_0}{4\pi R^2 m_p}$$

共动系中，定义 $\eta = E/M_0c^2$（E 为辐射能）。总光深为 1 时，若 $\eta > 1$，则辐射为主，反之则物质为主，大部分能量以重子定向动能的形式存在。总光深为 1 时，火球的 Lorentz 因子：

$$\Gamma_f = \frac{E_0 + M_0c^2}{E\left(\tau=1\right)+M_0c^2} = \frac{\eta_0+1}{\eta\left(\tau=1\right)+1}$$

对于 GRB，火球后期演化应由重子物质决定，$\tau=1$ 时 $\eta<1$。最终 Lorentz 因子 $\Gamma_f \simeq \eta_0 + 1$

2 火球演化基本图景

根据 Piran, Shemi & Narayan 1993，将火球看作理想流体，能量、动量、粒子数目守恒分别为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{3/4}\gamma\right)+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2e^{3/4}u\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(n+\frac{4}{3}e\right)\gamma u\right]+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(n+\frac{4}{3}e\right)\gamma^2u^2\right]=-\frac{1}{3}\frac{\partial e}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2nu\right)=-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{n}{\gamma+u}\right)$$

对于极端相对论性火球，$u\simeq\gamma$，有：

$$r^2n\gamma=const.$$

$$r^2e^{3/4}\gamma=const.$$

$$r^2\left(n+\frac{4}{3}e\right)\gamma^2=const.$$

辐射为主：$e\gg n$

$$\gamma\propto r, n\propto r^{-3}, e\propto r^{-4}, T\propto r^{-1}, T_{obs}=\gamma T\simeq const.$$

物质为主：$e\ll n$

$$\gamma\simeq const., n\propto r^{-2}, e\propto r^{-8/3}, T\propto r^{-2/3}, T_{obs}\propto r^{-2/3}$$

由于辐射为主阶段，火球尺度正比于 Lorentz 因子，暴源系中，尺度膨胀与 Lorentz 收缩抵消，火球厚度 Δ 保持不变，为 Δ_0。加速结束后，火球整体 Lorentz 因子达到 Γ_f，半径为 $r=\Gamma_f\Delta_0$。此后能量转化为重子动能，为冻结相，厚度依然不变。当 $r=\Gamma_f^2\Delta_0$ 之后，火球厚度正比于半径，即 $r=\Gamma_f^2\Delta$

根据是长春的《相对论流体力学》，相对论性激波跳跃条件：

$$\frac{e^{'}+\rho^{'}c^2}{n^{'}}=\gamma\frac{e+\rho c^2+p}{n}$$

$$\frac{n^{'}}{n}=\frac{\tilde{\gamma}^{'}\gamma^{'}+1}{\tilde{\gamma}^{'}-1}$$

$$\Gamma^2=\frac{(\gamma+1)\left[\tilde{\gamma}^{'}(\gamma-1)+1\right]^2}{\tilde{\gamma}^{'}\left(2-\tilde{\gamma}^{'}\right)(\gamma-1)+2}$$

其中 $\tilde{\gamma}^{'}$ 是绝热指数，γ 为激波化物质的平均 Lorentz 因子，Γ 表示激波的 Lorentz 因子，带撇量表示激波化物质，不带量表示未激波化物质。

内激波：Kobayashi et al. 1997

火球物质径向分布不均匀，快慢壳层碰撞产生光变。两壳层间距 $L = c\Delta t$，快慢相撞发生在：

$$R_{int} = \frac{L}{\beta_2 - \beta_1} \simeq 2\gamma_1^2 c\Delta t$$

根据守恒公式，碰撞后，整体速度、Lorentz 因子与内部无规则运动 Lorentz 因子分别为：

$$\beta = \frac{M_1\gamma_1\beta_1 + M_2\gamma_2\beta_2}{M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2}{M_1/\gamma_1 + M_2/\gamma_2}}$$

$$\gamma_{int} = \frac{\sqrt{(M_1+M_2)^2 + M_1M_2(\gamma_1/\gamma_2 + \gamma_2/\gamma_1 - 2)}}{M_1+M_2}$$

辐射效率：

$$\eta_{pulse} = \epsilon_e\left(1 - \frac{1}{\gamma_{int}}\right)$$

光变：下降时需要考虑纬度效应，$\delta t \simeq \delta t_d = R_{int}(1-\cos\theta)/c = R_{int}/2\gamma^2 c \simeq \Delta t$。

余辉：根据 Sari & Piran 1995，对于正向外激波，2 区有：

$$\frac{e_2}{n_2 m_p c^2} = \gamma_{21} - 1 \simeq \gamma_{21}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = 4\gamma_{21} + 3 \simeq 4\gamma_{21}$$

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$$

对于反向外激波，不一定符合极端相对论条件，3 区有：

$$\frac{e_3}{n_3 m_p c^2} = \gamma_{34} - 1$$

$$\frac{n_3}{n_4} = 4\gamma_{34} + 3$$

$$\gamma_{34} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_4} + \frac{\gamma_4}{\gamma_3}\right)$$

令 $f = n_4/n_1$，有：

$$f = \frac{\gamma_{21}-1}{\gamma_{34}-1}\frac{4\gamma_{21}+3}{4\gamma_{34}+3}$$

对于反向激波，采用薄壳近似，由粒子数守恒，有：

$$t_\Delta = \frac{\Delta_4}{c\left(\beta_4 - \beta_3\right)}\left(1 - \frac{n_4\gamma_4}{n_3\gamma_3}\right)$$

$$\beta_{sh} = \frac{n_3\gamma_3\beta_3 -_4 \gamma_4\beta_4}{n_3\beta_3 -_4 \beta_4}$$

其中 t_Δ 为反向激波穿越时间。相对论性反向激波：$\gamma_3 \ll \gamma_4$，$\gamma_{34} \gg 1$。牛顿性：$\gamma_3 \simeq \gamma_4$。

定义 4 个特征半径。一是相对论性转折点 R_N，二是减速半径 R_{η_0}，三是反向激波穿越壳层时的半径 R_{Δ_0}，四为扩散半径 $R_{sp} = \Delta_0\eta_0^2$。

星际介质（$k = 0$）环境：

$$\begin{cases} Unspread\left(RRS\right): \begin{cases} R_N = \frac{l^{3/2}}{\Delta_0^{1/2}\eta_0^2} \\ R_{\eta_0} = l\eta_0^{-2/3} \\ R_{\Delta_0} = l^{3/4}\Delta_0^{1/4} \\ R_{sp} = \Delta_0\eta_0^2 \end{cases} \\ Spread\left(NRS\right): \begin{cases} R_N = l\eta_0^{-2/3} \\ R_{\eta_0} = l\eta_0^{-2/3} \\ R_{\Delta_0} = l\eta_0^{-2/3} \\ R_{sp} = \Delta_0\eta_0^2 \end{cases} \end{cases}$$

星风（$k = 2$）环境：

$$\begin{cases} Unspread\left(initial - condition - dependent\right): \begin{cases} R_N = null \\ R_{\eta_0} = l\eta_0^{-2} \\ R_{\Delta_0} = l^{1/2}\Delta_0^{1/2} \\ R_{sp} = \Delta_0\eta_0^2 \end{cases} \\ Spread\left(NRS\right): \begin{cases} R_N = l\eta_0^{-2} \\ R_{\eta_0} = l\eta_0^{-2} \\ R_{\Delta_0} = l\eta_0^{-2} \\ R_{sp} = \Delta_0\eta_0^2 \end{cases} \end{cases}$$

在 RRS 达到 R_{Δ_0} 之前，或者 NRS 到达 R_{η_0} 之前，不可用 BM 1976 来描述壳层演化。之后 2 区主导演化。根据自相似解，观测者系中，有：

$$\gamma = \gamma_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(3-k)/(8-2k)}$$

$$r = \gamma_0^2 r_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/(4-k)}$$

这里 γ 是壳层整体 Lorentz 因子，$t_0 = \frac{r_0}{4(4-k)c}$。在星际介质环境下，有：

$$\gamma\left(t\right) = \left(\frac{17Et}{4\pi m_p nc}\right)^{1/4}$$

$$r\left(t\right) = \left(\frac{17E}{1024\pi m_p nc^5 t^3}\right)^{1/8}$$

3 同步辐射

设电子为幂率分布，即 $n\left(\gamma_e\right) \propto \gamma_e^{-p} \mathrm{d}\gamma_\mathrm{e}$，$\gamma_m \leqslant \gamma_e \leqslant \gamma_{max}$。若 $\gamma_{max} \gg \gamma_m$，电子数密度为：

$$n_e = n_p = \int_{\gamma_m}^{\gamma_{max}} n \mathrm{d}\gamma_e \simeq \frac{c}{p-1}\gamma_m^{1-p}$$

电子能量密度：

$$e_e = \epsilon_e e_{int} = \int_{\gamma_m}^{\gamma_{max}} \gamma_e m_e c^2 n \mathrm{d}\gamma_e \simeq \frac{c}{p-2}\gamma_m^{2-p} m_e c^2$$

内能为：$e_{int} = (\gamma - 1)\, n_p m_p c^2 \simeq \gamma n_p m_p c^2$，其中 γ 是激波相对未扰物质的 Lorentz 因子。

根据 Sari, Piran & Narayan 1998，由于 $\gamma n = \int \gamma_e^{-p} \mathrm{d}\gamma_\mathrm{e}$，$\epsilon_e 4\gamma^2 n m_p c^2 = \epsilon_e m_p c^2 \int \gamma_e \gamma_e^{1-p} \mathrm{d}\gamma_\mathrm{e}$，因此最小 Lorentz 因子为：

$$\gamma_m = \epsilon_e \frac{p-2}{p-1}\frac{m_p}{m_e}\gamma$$

最大 Lorentz 因子 γ_{max} 为电子加速时标与冷却时标相等时的 Lorentz 因子。对于同步辐射，电子冷却时标：

$$t_{cool} = \frac{\gamma_e m_e c^2}{P_{syn}}$$

其中：

$$P_{syn} = \frac{4}{3}\sigma_T c \gamma_e^2 \frac{B^2}{8\pi}$$

对于逆康普顿散射，功率再乘以系数 $1+Y$ 即可。电子加速时标：

$$t_{acc} = \frac{R_L}{c} = \frac{\gamma_e m_e c^2 / q_e B}{c}$$

因此：

$$\gamma_{max} = \left[\frac{6\pi q_e}{\sigma_T B\,(1+Y)}\right]^{1/2}$$

冷却 Lorentz 因子 γ_c 为冷却时标与动力学时标相等时的 Lorentz 因子。动力学时标：

$$t_{dyn} = \frac{\gamma t}{(1+z)}$$

因此：

$$\gamma_c = \frac{6\pi m_e c^2}{\sigma_T B^2 \gamma t}\frac{1+z}{1+Y}$$

根据能量连续性方程：

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \gamma_e}\left(\dot{\gamma_e} n\right)=\dot{Q}$$

分快冷却（$\gamma_c<\gamma_m<\gamma_{max}$）与慢冷却（$\gamma_m<\gamma_c<\gamma_{max}$）两种情况讨论。同步辐射有：

$$\nu\left(\gamma_e\right)=\frac{3x_p}{4\pi}\frac{q_e B}{m_e c}\gamma_e^2\gamma$$

$$P_{\nu,max}=\frac{\sqrt{3}\phi_p q_e^3}{m_e c^2}\gamma B$$

$$j_\nu=P_{syn} n\frac{\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}\nu}$$

对于同步辐射能谱，有:

$$F_\nu \propto\left\{\begin{array}{c} j_\nu/k_\nu, \nu<\nu_a \\ j_\nu, \nu>\nu_a \end{array}\right.$$

因此对于快冷却情形，有：

$$F_\nu \propto\left\{\begin{array}{l}
\nu_a<\nu_c\left\{\begin{array}{c}\nu^2, \nu<\nu_a \\ \nu^{1/3}, \nu_a<\nu<\nu_c \\ \nu^{-1/2}, \nu_c<\nu<\nu_m \\ \nu^{-p/2}, \nu_m<\nu<\nu_{max}\end{array}\right. \\
\nu_c<\nu_a<\nu_m\left\{\begin{array}{c}\nu^2, \nu<\nu_c \\ \nu^{5/2}, \nu_c<\nu<\nu_a \\ \nu^{-1/2}, \nu_a<\nu<\nu_m \\ \nu^{-p/2}, \nu_m<\nu<\nu_{max}\end{array}\right. \\
\nu_m<\nu_a<nu_{max}\left\{\begin{array}{c}\nu^2, \nu<\nu_c \\ \nu^{5/2}, \nu_c<\nu<\nu_m \\ \nu^{5/2}, \nu_m<\nu<\nu_a \\ \nu^{-p/2}, \nu_a<\nu<\nu_{max}\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

对于慢冷却情况：

$$F_\nu \propto\left\{\begin{array}{l}
\nu_a<\nu_m\left\{\begin{array}{c}\nu^2, \nu<\nu_a \\ \nu^{1/3}, \nu_a<\nu<\nu_m \\ \nu^{-(p-1)/2}, \nu_m<\nu<\nu_c \\ \nu^{-p/2}, \nu_c<\nu<\nu_{max}\end{array}\right. \\
\nu_m<\nu_a<\nu_c\left\{\begin{array}{c}\nu^2, \nu<\nu_m \\ \nu^{5/2}, \nu_m<\nu<\nu_a \\ \nu^{-(p-1)/2}, \nu_a<\nu<\nu_c \\ \nu^{-p/2}, \nu_m<\nu<\nu_{max}\end{array}\right. \\
\nu_c<\nu_a<nu_{max}\left\{\begin{array}{c}\nu^2, \nu<\nu_m \\ \nu^{5/2}, \nu_m<\nu<\nu_c \\ \nu^{5/2}, \nu_c<\nu<\nu_a \\ \nu^{-p/2}, \nu_a<\nu<\nu_{max}\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

对于系数，可由特征频率两侧流量相等来确定。

观测者系中，特征频率为：

$$\nu_m = 3x_p q_e \gamma^2 \left(\frac{2m_p \epsilon_B n}{\pi m_e^2}\right)^{1/2} \left[\epsilon_e \frac{p-2}{p-1}\frac{m_p}{m_e}(\gamma-1)\right]^2$$

$$\nu_c = 3x_p q_e \gamma^2 \left(\frac{2m_p \epsilon_B n}{\pi m_e^2}\right)^{1/2} \left[\frac{6\pi m_e c}{\sigma_T (32\pi\epsilon_B n m_p \gamma^2 c^2)\gamma t}\right]^2$$

峰值流量密度：

$$F_{\nu,max} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 n_e \frac{\sqrt{3}\phi_p q_e^3}{m_e c^2 \pi}\gamma B}{4\pi D_L^2}$$

将相似解表达式代入，可得以上几个特征值随时间的演化为：

$$\nu_m \propto t^{-3/2}, \nu_c \propto t^{-1/2}$$

而 $F_{\nu,max}$ 与时间无关。取分界点 $\nu_m = \nu_c$，作为高频与低频余辉的分界。对应时间和频率分别为：

$$t_{cm} = \frac{17}{36\pi} m_e^{-4} m_p^3 \sigma_T^2 c^{-3} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^2 (1+z)\,\epsilon_B^2 \epsilon_e^2 E n$$

$$\nu_{cm} = \frac{81}{34}\sqrt{\frac{\pi}{2}} m_e^3 m_p^{-5/2} \sigma_T^{-3} c^2 q_e x_p \frac{p-1}{p-2} \epsilon_B^{-5/2} \epsilon_e^{-1} E^{-1} n^{-3/2}$$

因此可以得出高频光变曲线（$t_{cm} > t_m > t_c$）：

$$F_\nu \propto \begin{cases} (\nu/\nu_c)^{1/3} F_{\nu,max} \propto t^{1/6}, t < t_c \\ (\nu/\nu_c)^{-1/2} F_{\nu,max} \propto t^{-1/4}, t_c < t < t_m \\ (\nu/\nu_c)^{-p/2} \nu_c/\nu_m^{1/2} F_{\nu,max} \propto t^{(2-3p)/4}, t_m < t < t_{cm} \\ (\nu/\nu_c)^{-p/2} \nu_c/\nu_m^{-(p-1)/2} F_{\nu,max} \propto t^{(2-3p)/4}, t_{cm} < t \end{cases}$$

低频光变曲线（$t_{cm} < t_m < t_c$）：

$$F_\nu \propto \begin{cases} (\nu/\nu_c)^{1/3} F_{\nu,max} \propto t^{1/6}, t < t_{cm} \\ (\nu/\nu_m)^{1/3} F_{\nu,max} \propto t^{1/2}, t_{cm} < t < t_m \\ (\nu/\nu_m)^{-(p-1)/2} F_{\nu,max} \propto t^{3(1-p)/4}, t_m < t < t_c \\ (\nu/\nu_c)^{-p/2} \nu_c/\nu_m^{-(p-1)/2} F_{\nu,max} \propto t^{(2-3p)/4}, t_c < t \end{cases}$$

4 逆康普顿散射

初始电子为幂律分布，即 $N(\gamma) \propto \gamma^{-p}$。假设电子各向同性，不计多次散射。在流体共动系中，有：$\frac{h\nu}{m_e c^2/\gamma_e} \ll 1$，故在 Thomson 极限下进行计算。

注：Thomson 光深为：$\tau = \sigma_T n R$。定义每次散射后，光子能量被改变的比例为：$y = \gamma_e^2 \tau$，光子初始能量为 $h\nu$。若一次逆康普顿散射后，有 $\gamma_e^3 h\nu > m_e c^2$，必须考虑 Klein-Nishina 极限。

以下只考虑 Thomson 极限。慢冷却情形，电子分布为：

$$N(\gamma) \propto \begin{cases} \gamma^{-p}, \gamma_m < \gamma < \gamma_c \\ \gamma^{-p-1}, \gamma > \gamma_c \end{cases}$$

逆康普顿散射的种子光子谱为：

$$F_{\nu_s} = \begin{cases} \left(\frac{\nu_s}{\nu_a}\right)^2 \left(\frac{\nu_a}{\nu_m}\right)^{1/3} F_{\nu,max}, \nu_s < \nu_a \\ \left(\frac{\nu_s}{\nu_m}\right)^{1/3} F_{\nu,max}, \nu_a < \nu_s < \nu_m \\ \left(\frac{\nu_s}{\nu_m}\right)^{-(p-1)/2} F_{\nu,max}, \nu_m < \nu_s < \nu_c \\ \left(\frac{\nu_s}{\nu_c}\right)^{-p/2} \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{-(p-1)/2} F_{\nu,max}, \nu_s > \nu_c \end{cases}$$

其中下角标 s 表示同步辐射。对于单次散射，根据 Rybicki & Lightman 1979，发射率为：

$$j_\nu^{IC} = 3\sigma_T \int_{\gamma_m}^{\infty} \mathrm{d}\gamma N(\gamma) \int_0^1 \mathrm{d}x g(x) \bar{f}_{\nu_s}(x)$$

其中 $\bar{f}_{\nu_s}$ 是激波波前的入射流量（specific flux），要求解 $f_\nu^{IC} = j_\nu^{IC} \frac{4}{3} \frac{R^2}{4\pi D^2}$，$R$ 为激波半径，D 是与激波的距离。同步辐射的流量为 $f_{\nu_s} = \bar{f}_{\nu_s} \frac{4\pi R^2}{4\pi D^2}$，因此逆康普顿散射流量有：

$$f_\nu^{IC} = 3\sigma_T \int_{\gamma_m}^{\infty} \mathrm{d}\gamma N(\gamma) \int_0^{x_0} \mathrm{d}x \bar{f}_{\nu_s}(x) \frac{4}{3} \frac{R^2}{4\pi D^2}$$

这里设 $0 < x < x_0$ 时，$g = 1$，化简上式：

$$f_\nu^{IC} = R\sigma_T \int_{\gamma_m}^{\infty} \mathrm{d}\gamma N(\gamma) \int_0^{x_0} \mathrm{d}x f_{\nu_s}(x)$$

x_0 的选取问题：令 $\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_0} x\mathrm{d}x$，因此可解出 $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$。这里 $x = \nu/4\gamma^2\nu_s$，$\nu_s = \nu/4\gamma^2 x$。因此种子光谱可以化为：

$$F_x = \begin{cases} \left(\frac{\nu/4\gamma^2 x}{\nu_a}\right)^2 \left(\frac{\nu_a}{\nu_m}\right)^{1/3} F_{\nu,max}, \nu/4\gamma^2 x < \nu_a \\ \left(\frac{\nu/4\gamma^2 x}{\nu_m}\right)^{1/3} F_{\nu,max}, \nu_a < \nu/4\gamma^2 x < \nu_m \\ \left(\frac{\nu/4\gamma^2 x}{\nu_m}\right)^{-(p-1)/2} F_{\nu,max}, \nu_m < \nu/4\gamma^2 x < \nu_c \\ \left(\frac{\nu/4\gamma^2 x}{\nu_c}\right)^{-p/2} \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{-(p-1)/2} F_{\nu,max}, \nu/4\gamma^2 x > \nu_c \end{cases}$$

积分之，保留至一阶，有：

$$I = \begin{cases} I_1 \simeq \frac{5}{2} f_{max} x_0 \left(\frac{\nu_a}{\nu_m}\right)^{1/3} \frac{\nu}{4\gamma^2 x_0 \nu_a}, \nu < 4\gamma^2 x_0 \nu_a \\ I_2 \simeq \frac{3}{2} f_{max} x_0 \left(\frac{\nu}{4\gamma^2 x_0 \nu_m}\right)^{1/3}, 4\gamma^2 x_0 \nu_a < \nu < 4\gamma^2 x_0 \nu_m \\ I_3 \simeq \frac{2}{p+1} f_{max} x_0 \left(\frac{\nu}{4\gamma^2 x_0 \nu_m}\right)^{(1-p)/2}, 4\gamma^2 x_0 \nu_m < \nu < 4\gamma^2 x_0 \nu_c \\ I_4 \simeq \frac{2}{p+2} f_{max} x_0 \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{(1-p)/2} \left(\frac{\nu}{4\gamma^2 \nu_c x_0}\right)^{-p/2}, \nu > 4\gamma^2 x_0 \nu_c \end{cases}$$

其中 $f_{max}=f_{\nu_s}(\nu_m)$。定义 $\gamma_{cr}(\nu)=\sqrt{\frac{\nu}{4x_0\nu_s}}$ 定义逆康普顿散射特征频率为：

$$\nu_a^{IC}=4\gamma_m^2x_0\nu_a$$
$$\nu_m^{IC}=4\gamma_m^2x_0\nu_m$$
$$\nu_c^{IC}=4\gamma_c^2x_0\nu_c$$

因此根据 $f_\nu^{IC}=R\sigma_T\int_{\gamma_m}^{\infty}\mathrm{d}\gamma N(\gamma)\int_0^{x_0}\mathrm{d}xf_{\nu_s}(x)$ 有：

$$f_\nu^{IC}=R\sigma_T\times\left\{\begin{array}{c}\int_{\gamma_m}^{\infty}\mathrm{d}\gamma NI_1,\nu<\nu_a^{IC}\\ \int_{\gamma_m}^{\gamma_{cr}(\nu_a)}\mathrm{d}\gamma NI_2+\int_{\gamma_{cr}(\nu_a)}^{\infty}\mathrm{d}\gamma NI_1,\nu_a^{IC}<\nu<\nu_m^{IC}\\ \int_{\gamma_m}^{\gamma_{cr}(\nu_m)}\mathrm{d}\gamma NI_3+\int_{\gamma_{cr}(\nu_m)}^{\gamma_{cr}(\nu_a)}\mathrm{d}\gamma NI_2+\int_{\gamma_{cr}(\nu_a)}^{\infty}\mathrm{d}\gamma NI_1,\nu_m^{IC}<\nu<4\gamma_m^2x_0\nu_c\\ \int_{\gamma_m}^{\gamma_{cr}(\nu_c)}\mathrm{d}\gamma NI_4+\int_{\gamma_{cr}(\nu_c)}^{\gamma_{cr}(\nu_m)}\mathrm{d}\gamma NI_3+\int_{\gamma_{cr}(\nu_m)}^{\gamma_{cr}(\nu_a)}\mathrm{d}\gamma NI_2+\int_{\gamma_{cr}(\nu_a)}^{\infty}\mathrm{d}\gamma NI_1,\nu>4\gamma_m^2x_0\nu_c\end{array}\right.$$

而 $4\gamma_m^2x_0\nu_c=\gamma_m^2\nu_c^{IC}/\gamma_c^2$，根据同步辐射频率表达式，有 $\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}$，因此有 $\gamma_m^2\nu_c^{IC}/\gamma_c^2=\sqrt{\nu_m^{IC}\nu_c^{IC}}$，此为 Sari & Esin 2001 之（A4）式。

总体积分得辐射谱：

$$f_\nu^{IC}=R\sigma_Tnf_{max}\times\left\{\begin{array}{c}\frac{5}{2}\frac{p-1}{p+1}\left(\frac{\nu_a}{\nu_m}\right)^{1/3}\left(\frac{\nu}{\nu_a^{IC}}\right),\nu<\nu_a^{IC}\\ \frac{3}{2}\frac{p-1}{p-1/3}\left(\frac{\nu}{\nu_m^{IC}}\right)^{1/3},\nu_a^{IC}<\nu<\nu_m^{IC}\\ \frac{p-1}{p+1}\left(\frac{\nu}{\nu_m^{IC}}\right)^{(1-p)/2}\left[\frac{4(p+1/3)}{(p+1)(p-1/3)}+\ln\left(\frac{\nu}{\nu_m^{IC}}\right)\right],\nu_m^{IC}<\nu<\sqrt{\nu_m^{IC}\nu_c^{IC}}\\ \frac{p-1}{p+1}\left(\frac{\nu}{\nu_c^{IC}}\right)^{(1-p)/2}\left[2\frac{2p+3}{p+2}-\frac{2}{(p+1)(p+2)}+\ln\left(\frac{\nu_c^{IC}}{\nu}\right)\right],\sqrt{\nu_m^{IC}\nu_c^{IC}}<\nu<\nu_c^{IC}\\ \frac{p-1}{p+1}\left(\frac{\nu}{\nu_m^{IC}}\right)^{-p/2}\left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)\left[2\frac{2p+3}{p+2}+\frac{2}{(p+2)^2}+\frac{p+1}{p+2}\ln\left(\frac{\nu}{\nu_c^{IC}}\right)\right],\nu_c^{IC}<\nu\end{array}\right.$$

峰值频率为 ν_c^{IC}，峰值流量为：

$$f_\nu^{IC}(\nu_m)\simeq4\sigma_TRnx_0\frac{(p-1)(p+1/3)}{(p-1/3)(p+1)^2}$$

对快冷却情形，电子分布为：

$$N(\gamma)\propto\left\{\begin{array}{c}\gamma^{-2},\gamma_mc<\gamma<\gamma_m\\ \gamma^{-p-1},\gamma>\gamma_m\end{array}\right.$$

种子光子谱为：

$$F_{\nu_s}=\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{\nu_s}{\nu_a}\right)^2\left(\frac{\nu_a}{\nu_c}\right)^{1/3}F_{\nu,max},\nu_s<\nu_a\\ \left(\frac{\nu_s}{\nu_c}\right)^{1/3}F_{\nu,max},\nu_a<\nu_s<\nu_c\\ \left(\frac{\nu_s}{\nu_c}\right)^{-1/2}F_{\nu,max},\nu_c<\nu_s<\nu_m\\ \left(\frac{\nu_s}{\nu_m}\right)^{-p/2}\left(\frac{\nu_m}{\nu_c}\right)^{-1/2}F_{\nu,max},\nu_s>\nu_m\end{array}\right.$$

作类似处理，有：

$$
f_\nu^{IC}=R\sigma_T n f_{max}\times\left\{\begin{array}{c}
\frac{5}{6}\left(\frac{\nu_a}{\nu_c}\right)^{1/3}\left(\frac{\nu}{\nu_a^{IC}}\right),\nu<\nu_a^{IC}\\
\frac{9}{10}\left(\frac{\nu}{\nu_c^{IC}}\right)^{1/3},\nu_a^{IC}<\nu<\nu_c^{IC}\\
\frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{\nu_c^{IC}}\right)^{-1/2}\left[\frac{28}{15}-\ln\left(\frac{\nu}{\nu_c^{IC}}\right)\right],\nu_c^{IC}<\nu<\sqrt{\nu_m^{IC}\nu_c^{IC}}\\
\frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{\nu_c^{IC}}\right)^{-1/2}\left[2\frac{p+5}{(p+2)(p-1)}-\frac{2}{3}\frac{p-1}{p+2}+\ln\left(\frac{\nu_m^{IC}}{\nu}\right)\right],\sqrt{\nu_m^{IC}\nu_c^{IC}}<\nu<\nu_m^{IC}\\
\frac{1}{p+2}\left(\frac{\nu}{\nu_m^{IC}}\right)^{-p/2}\left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)\left[\frac{2}{3}\frac{p+5}{p-1}-\frac{2}{3}\frac{p-1}{p+2}\ln\left(\frac{\nu}{\nu_m^{IC}}\right)\right],\nu_m^{IC}<\nu
\end{array}\right.
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\nu_a^{IC}&=4\gamma_c^2x_0\nu_a\\
\nu_m^{IC}&=4\gamma_m^2x_0\nu_m\\
\nu_c^{IC}&=4\gamma_c^2x_0\nu_c
\end{aligned}
$$

峰值频率为 ν_m^{IC}，峰值流量为：

$$
f_\nu^{IC}(\nu_c)\simeq\frac{28}{45}\sigma_T R n f_{max}x_0
$$

逆康普顿散射与同步辐射流量比为：

$$
\frac{f_{max}^{IC}}{f_{max}^{syn}}\simeq\frac{\sigma_T N}{4\pi R^2}\simeq\frac{1}{3}\sigma_T nR
$$

近似（$L\simeq\nu_c f_\nu(\nu_c)$）亮度比为：

$$
\frac{L_{IC}}{L_{syn}}\simeq\left\{\begin{array}{c}
\frac{2}{3}\sigma_T nR\gamma_c^2\left(\frac{\gamma_c}{\gamma_m}\right)^{1-p},for-slow-cooling\\
\frac{2}{3}\sigma_T nR\gamma_c\gamma_m,for-fast-cooling
\end{array}\right.
$$

定义亮度比为康普顿 Y 参数：

$$
Y=\frac{L_{IC}}{L_{syn}}=\frac{u_{rad}}{U_B}=\frac{\eta U_e/(1+Y)}{U_B}=\frac{\eta\epsilon_e}{\epsilon_B(1+Y)}
$$

解之有：

$$
Y=\frac{-1+\sqrt{1+4\eta\epsilon_e/\epsilon_B}}{2}=\left\{\begin{array}{c}
\eta\epsilon_e/\epsilon_B,\eta\epsilon_e/\epsilon_B\ll1\\
\sqrt{\eta\epsilon_e/\epsilon_B},\eta\epsilon_e/\epsilon_B\gg1
\end{array}\right.
$$

其中第 1 种情况对应逆康普顿散射不重要的情形，而第 2 种极限是逆康普顿散射占据支配地位的情况。这里 η 是电子辐射效率，对慢冷却为 $\eta=(\gamma_c/\gamma_m)^{2-p}$，快冷却为 $\eta=1$。以下计算演化时，主要考虑星际介质环境，即均匀分布。

辐射可以分 3 阶段，依次为：逆康普顿散射占主导的快冷却阶段；逆康普顿散射主导的慢冷却阶段；同步辐射主导的慢冷却阶段。以下分别讨论。

1、对于逆康普顿散射占主导的快冷却阶段，$1+Y\simeq Y\simeq\sqrt{\epsilon_e/\epsilon_B}$。由于能量均分因子为常数，此阶段逆康普顿只对冷却率有影响，并不影响光谱外观。先考虑同步辐射，有：

$$\nu_c \propto t^{-1/2}, \nu_m \propto t^{-3/2}$$

因此快慢冷却过渡时间有：

$$t_0 \propto \epsilon_B^2 \epsilon_e^2 E_{52} n$$

考虑逆康普顿散射后，因 $\nu_C^{IC} \propto \gamma_c^2 \left(\frac{\epsilon_B}{\epsilon_e}\right) \propto t^{-1/2} \frac{\epsilon_B}{\epsilon_e}$，故有：

$$t_0^{IC} \propto \epsilon_B \epsilon_e^3 E_{52} n$$

2、对于逆康普顿散射主导的慢冷却阶段，$1+Y \simeq Y \simeq \sqrt{\eta \epsilon_e / \epsilon_B}$。其中 $\eta = \left(\frac{\gamma_c}{\gamma_m}\right)^{2-p} = \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{(2-p)/2}$。同步辐射冷却 Lorentz 因子有 $\gamma_c^{IC} = \frac{\gamma_c^{syn}}{1+Y} \simeq \frac{\gamma_c^{syn}}{Y}$。因此有：$\nu_c / \nu_m \propto t Y^{-2}$。可求出：

$$Y = \sqrt{\frac{\eta \epsilon_e}{\epsilon_B}} = \left(\frac{\nu_c}{\nu_m}\right)^{(2-p)/4} \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_B}} \propto \left(\frac{t}{Y^2}\right)^{(2-p)/4} \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_B}}$$

由上式，有：

$$Y \propto \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_B}} t^{-(p-2)/[2(4-p)]}$$

下面求光变曲线。

$$\nu_a^{IC} \propto \gamma_m^2 \nu_a \propto \left(t^{-3/8}\right)^2 \nu_a \propto t^{-3/4}$$

$$\nu_m^{IC} \propto \gamma_m^2 \nu_m \propto \left(t^{-3/8}\right)^2 t^{-3/2} \propto t^{-9/4}$$

$$\nu_c^{IC} \propto \gamma_c^2 \nu_c \propto (1+Y)^{-4} t^{-1/4} \propto t^{-1/4+[2(p-2)]/(4-p)}$$

$$f_{max}^{IC} \propto \sigma_T R n f_{max} \propto t^{1/4}$$

总光变曲线为：

$$f_\nu^{IC} \propto \begin{cases} t^{9/4}, \nu < \nu_a^{IC} \\ t, \nu_a^{IC} < \nu < \nu_m^{IC} \\ t^{-(9p-11)/8}, \nu_m^{IC} < \nu < \nu_c^{IC} \\ t^{-(9p-10)/8+(p-2)/(4-p)}, \nu_c^{IC} < \nu \end{cases}$$

3、对同步辐射主导的慢冷却阶段，$Y < 1$，遵循 Sari, Piran & Narayan 1998 中的慢冷却光变曲线。转换时间的计算：令 $Y = 1$，因此 $\sqrt{\epsilon_e/\epsilon_B} \left(t/t_0^{IC}\right)^{-(p-2)/[2(4-p)]} = 1$，可以求出：

$$t^{IC} = t_0^{IC} \left(\frac{\epsilon_e}{\epsilon_B}\right)^{(4-p)/(p-2)}$$

5 喷流效应

此处考虑有侧向膨胀的喷流。主要有两种假设，其一是以光速膨胀（Sari, Piran & Halpern 1999），另一种是以 local 声速 $c_s = c/\sqrt{3}$ 膨胀（Rhoads 1999）。由于动力学演化基本相同，计算出的光变曲线只有系数差异。

以下设以光速膨胀。根据 Lorentz 变换的基本原理，当整体 Lorentz 因子 $\gamma < \theta_0^{-1}$ 时，可以察觉出膨胀。这里 θ_0 是喷流初始张角。根据自相似解，有：

$$\gamma = 6\left(\frac{E_{52}}{n_1}\right)^{1/8} t_{day}^{-3/8}$$

因此拐折时间有：

$$t_{jet} \propto E^{1/3}\theta_0^{8/3}$$

定义喷流扫过的介质质量与初始质量之比为：

$$f = \frac{1}{M_0}\int_0^R r^2\Omega\left(r\right) n m_p \mathrm{d}r$$

式中 Ω 是喷流对 central engine 所张的立体角，$\Omega\left(r\right) = \pi\left(\theta_0 + v t_{proper}/ct\right)^2$，其中 $ct \simeq r$。根据能量守恒，有：

$$\gamma_0 M_0 c^2 = \gamma^2 f M_0 c^2 + \gamma M_0 c^2$$

因此对于相对论性阶段：

$$\gamma = \frac{-1+\sqrt{1+4\gamma_0 f}}{2f} \simeq \sqrt{\gamma_0/f}$$

相对论性阶段，由于 $t_{proper} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} << t$，$v \simeq c$，故在 Ω 表达式中，第一项占据主导，也就是：

$$\Omega \simeq \pi\theta_0 \simeq const.$$

故有：$f \propto R^3$，$\gamma \propto R^{-3/2}$。由于 $R = \gamma^2 ct$，有：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R} \propto R^2 \propto t_{proper}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}t_{proper}}{\mathrm{d}R} \propto \gamma^{-1} \propto f^{1/2}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}R} \propto \gamma^{-2} \propto f$$

一般情况下，R 为常数，因此：

$$R \simeq \gamma^2 ct \simeq const.$$

故有：

$$\gamma \propto t^{-1/2}$$

这是喷流情形下 Lorentz 因子的演化。代入特征频率及峰值流量，可以求出：

$$\nu_m \propto \gamma^4 \propto t^{-2}$$

$$\nu_c \propto \gamma^{-4} t^{-2} \simeq const.$$

$$F_{\nu,max} \propto R^3 \gamma^2 \propto t^{-1}$$

由于喷流拐折发生在余辉演化后期，应采用慢冷却阶段的光谱。对自吸收频率有：

$$\nu_a = \left[\frac{c\,(p-1)}{3}\frac{q_e n R}{B\gamma^5}\right]^{3/5} \nu_m \propto R^{3/5}\gamma^{2/5} \propto t^{-1/5}$$

所以光变曲线为：

$$f_\nu \propto \begin{cases} const., \nu < \nu_a \\ t^{1/3}, \nu_a < \nu < \nu_m \\ t^{-p}, \nu_m < \nu < \nu_c \\ t^{-p}, \nu_c < \nu \end{cases}$$

参考文献

[1] Kobayashi, S., Piran, T. & Sari, R., 1997, *ApJ*, **490**, 92

[2] Piran, T., Shemi, A. & Narayan, R., 1993, *MNRAS*, **263**, 861

[3] Rhoads, J. E., 1999, *ApJ*, **525**, 737

[4] Piran, T., 1995, *ApJ*, **455**, L143

[5] Sari, R., Piran, T., & Narayan, R., 1998, *ApJ*, **497**, L17

[6] Sari, R., Piran, T. & Halpern, J. P., 1999, *ApJ*,**519**, L17

[7] Sari, R & Esin, A., 2001, *ApJ*, **584**, 787

[8] Shemi, A. & Piran, T., 1990, *ApJ*, **365**, L55